

DOI: 10.7652/xjtuxb201310018

五自由度机械臂的运动学分析及时滞控制

张晓艳^{1,3}, 孙建桥², 丁千¹

(1. 天津大学力学系, 300073, 天津; 2. 加州大学默塞得分校工学院, 95343, 美国加利福尼亚州默塞得市;
3. 天津电子信息职业技术学院电子系, 300132, 天津)

摘要: 针对五自由度刚性机械臂的操作系统,设计了一种简单的运动学解算方法。在电机的控制系统中,考虑了控制时滞对系统稳定性的影响,可以提高控制系统的性能;采用低通滤波器时间连续法(LPCTA)将时滞微分方程转换为不显含时滞的微分方程,从而简化了运算;采用最优控制方法进行了控制器设计。实验结果表明:文中提出的运动学解算方法运算量小、准确,适用于机械臂的实时控制应用;所设计的五自由度机械臂的时滞控制系统能够实现机械臂轨迹的跟踪。

关键词: 机器人;五自由度机械臂;运动学;雅可比矩阵;时滞控制

中图分类号: O311.2;TP241 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2013)10-0103-06

Kinematics Analysis and Time Delayed Control of a
Five-Degree of Freedom Manipulator

ZHANG Xiaoyan^{1,3}, SUN Jianqiao², DING Qian¹

(1. Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300073, China; 2. School of Engineering,
University of California, Merced, CA 95343, USA; 3. Department of Electronics, Tianjin
Electronic Information Vocational Technology College, Tianjin 300132, China)

Abstract: An approach to analyze kinematics of a five-degree of freedom (5-DOF) robotic manipulator is proposed. The effect of the time delay in control on the stability of the motor control system is considered. The time delayed differential equations are converted into differential equations without delay by using the lowpass filter-based continuous-time approximation (LPCTA). The optimal control method is adopted to design the controller. Experimental results show that the proposed kinematics algorithm is accurate with less computational cost, and is suitable for real-time control application of 5-DOF manipulator. The time delayed control system of 5-DOF manipulator can accurately track the desired trajectory.

Keywords: robotics; five-degree of freedom manipulator; kinematics; Jacobian matrix; time delayed control

时滞是控制系统的常见现象,随着控制系统速度的提高,控制回路的时滞已不是相对小的量。时滞的存在使得作动器的输出力不能按照控制的需要作用于受控对象,所以常常会降低主动控制系统的性能,甚至引起受控系统失稳^[1]。因此,时滞已成为受控机械系统动力学分析和控制设计中必须考虑的因素。

对于只含有定常输入时滞的线性动力学系统,Kwon 等通过状态变换或离散时滞系统扩维方法将其化简为形式上不显含时滞的等效无时滞系统,然后采用常规的无时滞最优控制方法来设计控制律^[2]。蔡国平等利用状态变换得到了一种时滞最优

收稿日期: 2013-02-22。 作者简介: 张晓艳(1974—),女,博士生;孙建桥(通信作者),男,教授,博士生导师。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11172197)。

控制方法,讨论了其在结构振动主动控制中的应用^[3],并且用扩维的方法将离散时滞系统转化为等效无时滞系统,设计了时滞系统 LQ 最优控制器^[4]。

机械臂作为一类非线性系统,具有强耦合、时变、模型不确定等特点。陈启军等分析了基于比例-微分(PD)控制的 3 种常用机器人轨迹跟踪算法的稳定性和鲁棒性^[5];苏玉鑫等在机器人控制中采用了一类具有小误差放大、大误差饱和功能的非线性饱和函数来改进常用的线性比例-微分加(PD+)控制^[6];孙富春等针对多关节机械手的鲁棒跟随控制器设计问题,提出了一种新的机械手神经网络自适应滑动模控制器设计方法^[7];刘建昌等考虑到机械臂动力学模型的非线性和参数的不确定性,提出了采用神经网络作为补偿器的机械臂轨迹控制策略^[8];张文辉等提出了一种神经网络与变结构融合的控制策略,用于非线性机器人的控制^[9]。

机械臂作为多自由度系统,其信号的采集和运动学解算等都需要时间,控制过程必然存在时滞,因此研究机械臂的时滞问题是非常必要的。蔡国平课题组已经对机械臂时滞问题的理论和实验进行了许多研究^[10-12]。针对机械臂控制系统的时滞问题,本文首先建立五自由度机械臂的运动学模型,采用矢量微分法建立机械臂的雅可比矩阵;考虑控制系统的时滞,建立机械臂位置控制的动力学方程,采用低通滤波器时间连续法(LPCTA)^[13]将时滞微分方程化为不含时滞的常微分方程,采用最优控制方法设计控制器。

1 五自由度机械臂的运动学方程

定义五自由度机械臂的运动学方程为

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x}=[x, y, z, \theta_p, \theta_r]$ 是机械臂末端执行器的作业矢量; $\boldsymbol{\theta}=[\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]$ 是机械臂的关节矢量。如图 1 所示,在基础坐标系中,末端执行器可以在 x 、 y 、 z 坐标轴方向移动,并且绕 y 、 r_e 轴转动。

对式(1)微分得

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (2)$$

式中: $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 是机械臂关节在关节空间中的速度; $\dot{\mathbf{x}}$ 是机械臂末端执行器在操作空间中的广义速度; $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ 是确定关节空间速度 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 与操作空间速度 $\dot{\mathbf{x}}$ 之间关系的雅可比矩阵。采用矢量微分法建立五自由度机械臂的雅可比矩阵。

2 五自由度机械臂雅可比矩阵的建立

五自由度机械臂包括 5 个转动关节,其结构简图见图 1。 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ 为 5 个关节的旋转角度, l_1, l_2, l_3, l_4 为各个臂的长度。

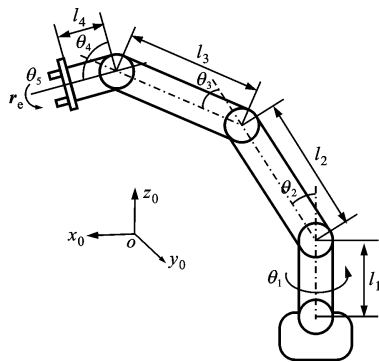


图 1 五自由度机械臂结构简图

定义各关节坐标系之间的旋转矩阵为

$$\mathbf{R}_{10} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$\mathbf{R}_{21} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \quad (3b)$$

$$\mathbf{R}_{32} = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & 0 & \sin\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_3 & 0 & \cos\theta_3 \end{bmatrix} \quad (3c)$$

$$\mathbf{R}_{43} = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 & 0 & \sin\theta_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_4 & 0 & \cos\theta_4 \end{bmatrix} \quad (3d)$$

$$\mathbf{R}_{54} = \begin{bmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3e)$$

各关节到基础坐标系的位移矢量为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{00} &= [0, 0, 0]^T \\ \mathbf{r}_{10} &= \mathbf{r}_{00} + \mathbf{R}_{10}[0, 0, l_1]^T \\ \mathbf{r}_{20} &= \mathbf{r}_{10} + \mathbf{R}_{10}\mathbf{R}_{21}[0, 0, l_2]^T \\ \mathbf{r}_{30} &= \mathbf{r}_{20} + \mathbf{R}_{10}\mathbf{R}_{21}\mathbf{R}_{32}[0, 0, l_3]^T \\ \mathbf{r}_{40} &= \mathbf{r}_{30} + \mathbf{R}_{10}\mathbf{R}_{21}\mathbf{R}_{32}\mathbf{R}_{43}[0, 0, 0]^T \\ \mathbf{r}_{50} &= \mathbf{r}_{40} + \mathbf{R}_{10}\mathbf{R}_{21}\mathbf{R}_{32}\mathbf{R}_{43}\mathbf{R}_{54}[0, 0, l_4]^T \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

末端执行器相对基础坐标系的旋转矩阵为

$$\mathbf{R}_{50} = \mathbf{R}_{10}\mathbf{R}_{21}\mathbf{R}_{32}\mathbf{R}_{43}\mathbf{R}_{54} \quad (5)$$

定义变量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 和 $\mathbf{e}_3$ 为绕 z 、 y 和 r_e 轴旋转的角度, $\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0$ 为基础坐标系的单位矢量。末端执行

器相对基础坐标系的方向矢量可表示为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \theta_1 \mathbf{k}_0 \\ \mathbf{e}_2 &= (\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \mathbf{j}_0 \\ \mathbf{e}_3 &= \theta_5 \mathbf{e} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$\mathbf{r}_{50}$ 是末端执行器的位移矢量

$$\mathbf{r}_{50} = [\mathbf{x}_{o5}, \mathbf{y}_{o5}, \mathbf{z}_{o5}] \quad (7)$$

$\mathbf{e}$ 是末端执行器的角度矢量

$$\mathbf{e} = [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \quad (8)$$

前向雅可比矩阵为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{o5} \\ \dot{\mathbf{y}}_{o5} \\ \dot{\mathbf{z}}_{o5} \\ \dot{\mathbf{e}}_2 \\ \dot{\mathbf{e}}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_{o5}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \mathbf{x}_{o5}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \mathbf{x}_{o5}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \mathbf{x}_{o5}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \mathbf{x}_{o5}}{\partial \theta_5} \\ \frac{\partial \mathbf{y}_{o5}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \mathbf{y}_{o5}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \mathbf{y}_{o5}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \mathbf{y}_{o5}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \mathbf{y}_{o5}}{\partial \theta_5} \\ \frac{\partial \mathbf{z}_{o5}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \mathbf{z}_{o5}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \mathbf{z}_{o5}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \mathbf{z}_{o5}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \mathbf{z}_{o5}}{\partial \theta_5} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \theta_5} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \theta_5} \end{bmatrix} \quad (10)$$

在机械臂的机械结构设计上,电机角度和关节角度之间存在着机械耦合关系。定义关节角度 $\boldsymbol{\theta}$ 和电机角度 $\mathbf{q}=[q_1, q_2, q_3, q_4, q_5]$ 之间的耦合关系为

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{q} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

3 五自由度机械臂的时滞反馈控制

五自由度机械臂由 5 个直流电机控制 5 个关节,采用定点位置控制方式,即目标是以末端位置为输出进行输出跟踪和调节,控制律采用 PD 闭环控制律

$$u = k_{pi}(q_{di} - q_i) - k_{di}\dot{q}_i \quad (12)$$

式中: q_i 是电机角度; $q_{di} (i=1, \dots, 5)$ 是电机角度的期望值。

考虑直流电机的动力学方程

$$\dot{q}_i(t) = -\frac{1}{T}q_i(t) + \frac{k_a k}{T}u(t) \quad (13)$$

式中: $k=1/3$;归一化采样时间 $T=0.07$; $k_a=3.5$ 。

由于在实验中存在各种机械和电干扰,会导致采集的信号中含有高频干扰,因此使用二阶滤波器对实际采集的电机角度进行滤波。二阶滤波器的方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{1i}(t) &= x_{2i}(t) \\ \dot{x}_{2i}(t) &= -\omega^2 x_{1i}(t) - 2\zeta\omega x_{2i}(t) + \omega^2 q_i(t) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中: x_{1i} 是滤波后的电机角度; x_{2i} 是滤波后的电机角速度; $\omega=2\pi \times 10$; $\zeta=1$ 。

五自由度机械臂系统对时滞比较敏感。实验测试表明,当时滞为 0.001 7 s 时,系统就会发生振动失稳现象,因此,在设计控制律时需要考虑控制回路存在的时滞。将式(13)和(14)写成如下矩阵形式的时滞动力学方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{B}_i u_i(t - \tau) = \\ &\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{B}_i \mathbf{k}_i \mathbf{x}_i(t - \tau) \end{aligned} \quad (15)$$

式中: $\mathbf{x}_i = [q_i, x_{1i}, x_{2i}]^T$; $\mathbf{k}_i = [0, k_{pi}, k_{di}]^T$; $\tau = 0.001$ s。在实验时,系统采样时间是 0.000 1 s,即时滞是采样时间的 10 倍。

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \omega^2 & -\omega^2 & -2\zeta\omega \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{A}_{di} \equiv -\mathbf{B}_i \mathbf{k}_i = \frac{k_a k}{T} \begin{bmatrix} 0 & -k_{pi} & -k_{di} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

对式(15)采用低通滤波时间连续法(LPCTA),将时滞动力学方程转换为不显含时滞量的状态方程,再进行五自由度机械臂闭环系统的最优设计。

3.1 低通滤波器时间连续法

LPCTA 可以写成如下形式^[13]

$$\mathbf{H}_{i, \text{LPCTA}} \dot{\mathbf{y}}_i(t) = \mathbf{F}_{i, \text{LPCTA}} \mathbf{y}_i(t) \quad (18)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{i, \text{LPCTA}} &= \\ &\begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & \mathbf{0} \\ \left(\frac{1}{2} + r\right)\mathbf{I} & \left(\frac{1}{2} - r\right)\mathbf{I} & & \\ & \dots & \dots & \\ \mathbf{0} & & \left(\frac{1}{2} + r\right)\mathbf{I} & \left(\frac{1}{2} - r\right)\mathbf{I} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mathbf{F}_{i,\text{LPCTA}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{A}_{di} \\ \frac{1}{\Delta\tau}\mathbf{I} & -\frac{1}{\Delta\tau}\mathbf{I} & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & & \frac{1}{\Delta\tau}\mathbf{I} & -\frac{1}{\Delta\tau}\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

(20)

其中 $r=1/(pT)$, T 是采样时间, $p>0$ 是一阶滤波器的带宽。

3.2 五自由度机械臂的时滞系统稳定性

式(18)在 $[t_j, t_{j+1}]$ 时间间隔内产生映射矩阵

$$\mathbf{y}_{i(j+1)} = \Phi \mathbf{y}_{ij}$$

(21)

系统的稳定条件由映射矩阵的特征值决定,即

$$|\lambda_k(\Phi)| \leq 1, \quad \forall k$$

(22)

依据此判据,可以在 k_{pi} 、 k_{di} 的反馈增益空间中预测系统(15)的稳定边界。反馈增益空间严格定义在有限且紧致的集合 Ω 范围内,可以通过在稳定域中寻找 $\lambda_{\max}$ 的最小值来确定最优的 k_{pi} 和 k_{di} 值^[14]

$$\min[\max |\lambda(\Phi)|], \quad \text{相当于 } \lambda_{\max} < 1$$

(23)

3.3 五自由度机械臂的时滞反馈控制结果

实验系统为 Quanser 公司的五自由度工业机械臂,如图 2 所示,包括五自由度工业机械臂、Q8 数据采集卡、伺服手爪、QuaRC-simulink 转换程序等。实验系统的工作流程如图 3 所示。

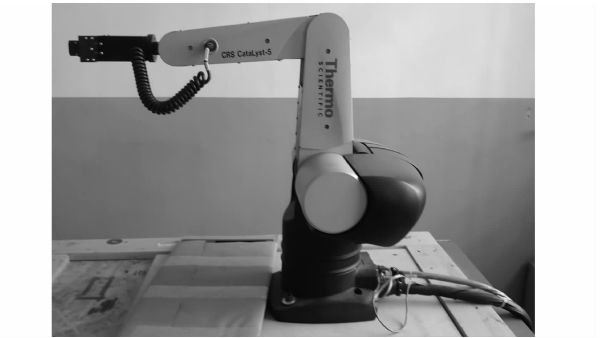
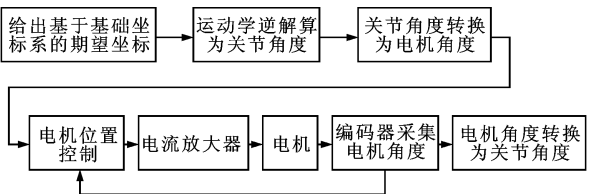


图 2 实验系统照片



实验中,取 5 元最优反馈增益矩阵

$$\mathbf{k}_p = [33 \quad 38 \quad 74 \quad 24 \quad 17]$$

(24)

$$\mathbf{k}_d = [0.11 \quad 0.11 \quad 0.11 \quad 0.11 \quad 0.11]$$

(25)

控制律的设计是以电机的动力学方程为依据的, k_p 值相同。在实验系统中,各个关节的动力学性质是有差异的,反映到实验现象上,就是如果采用相同的 k_p 值,则控制效果不理想。因此,在设计参数的基础上需要进行参数调整,最终选出最优的反馈增益。

基础坐标系下的期望坐标值如表 1 所示。实验目标是实现末端执行器在 7 个离散点之间尽快且无超调地运动,总操作时间为 30 s。

表 1 基础坐标系下的期望坐标值

t/s	x/mm	y/mm	z/mm	$\theta_p/(^\circ)$	$\theta_r/(^\circ)$
7~10	40	90	-30	10	10
>10~13	40	90	-100	15	5
>13~16	50	90	-100	25	15
>16~19	65	10	-70	28	15
>19~21	65	10	-100	30	10
>21~24	65	10	-70	25	10
>24~30	65	-20	-70	25	10

图 4~图 8 显示了电机位置的跟踪效果。从各图中可以看出,采用时滞控制律使电机 1~5 基本达到了所要求的位置,表明时滞控制律的设计有较好的控制性能。

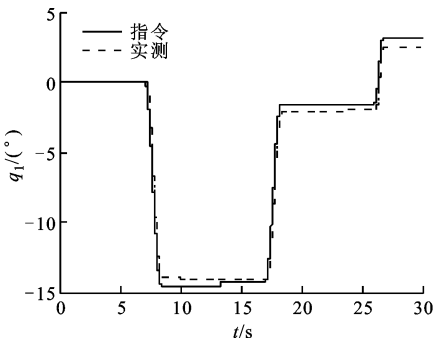


图 4 电机 1 位置跟踪曲线

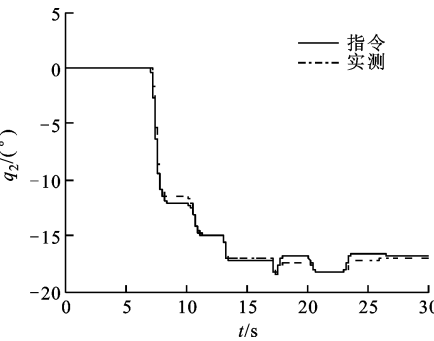


图 5 电机 2 位置跟踪曲线

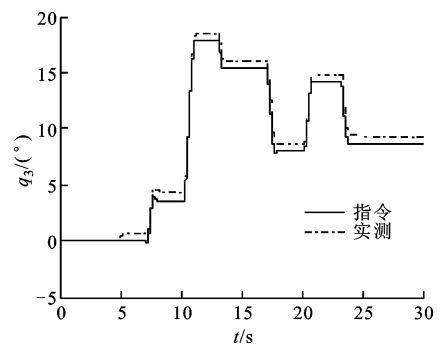


图 6 电机 3 位置跟踪曲线

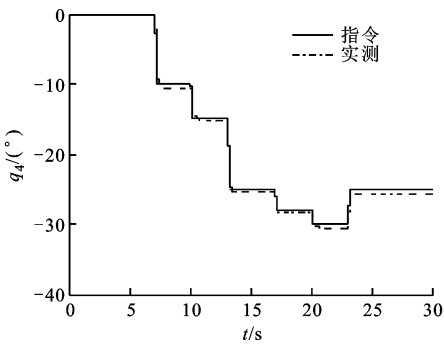


图 7 电机 4 位置跟踪曲线

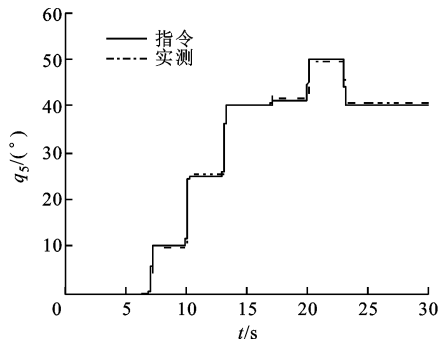


图 8 电机 5 位置跟踪曲线

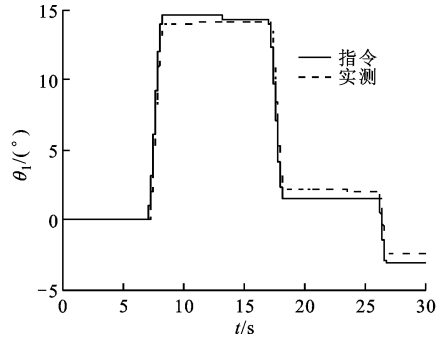


图 9 关节 1 位置跟踪曲线

方式是独立地控制每个电机，而忽略了系统各关节之间的动态耦合，而这种耦合关系会影响关节的控制效果。因此，下一步的工作是考虑各关节的耦合关系，研究多目标优化设计。

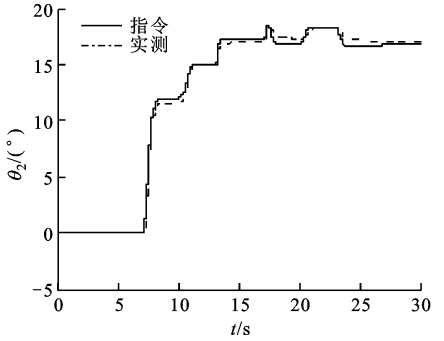


图 10 关节 2 位置跟踪曲线

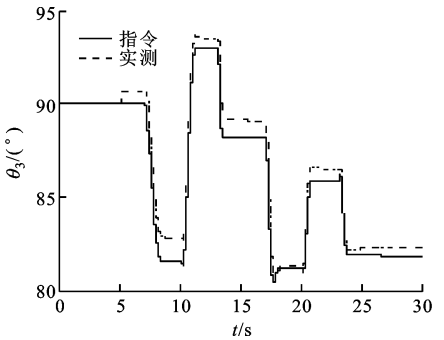


图 11 关节 3 位置跟踪曲线

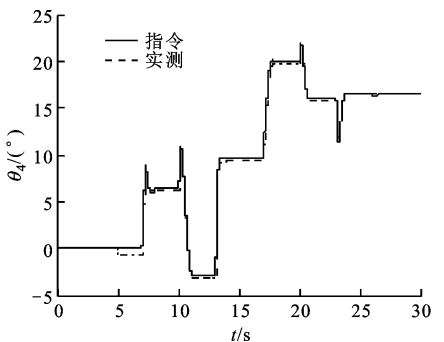


图 12 关节 4 位置跟踪曲线

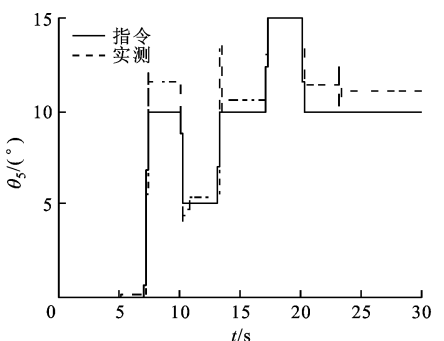


图 13 关节 5 位置跟踪曲线

图 9~图 13 显示了关节位置的跟踪效果。从图中可以看到:关节角度与电机角度满足式(11)给定的耦合关系;关节的控制效果比电机的控制效果差,尤其是第 5 个关节,原因主要是本文采用的控制

4 结 论

本文针对五自由度机械臂,建立了易于解算的运动学模型,并在电机控制系统中考虑了时滞的影响,使用LPCTA方法将时滞微分方程转换为不显含时滞的微分方程,通过最优设计方法设计了控制器。实验结果验证了本文提出的时滞反馈控制算法和运动学解算方法的有效性。该算法简单,易于工程推广。

参考文献:

- [1] ALKHATIB R, GOLNARAGHI M F. Active structural vibration control: a review [J]. Shock and Vibration Digest, 2003, 35(53): 367-383.
- [2] KWON W, PEARSON A. Feedback stabilization of linear systems with delayed control [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1980, 25(2): 266-269.
- [3] CAI Guo-Ping, HUANG Jin-Zhi, YANG Simon X. An optimal control method for linear systems with time delay [J]. Computers and Structures, 2003, 81: 1539-1546.
- [4] CAI Guo-Ping, HUANG Jin-Zhi. Optimal control method with time delay in control [J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 251(3): 383-394.
- [5] 陈启军, 王月娟, 陈辉堂. 基于PD控制的机器人轨迹跟踪性能研究与比较 [J]. 控制与决策, 2003, 18(1): 53-56.
CHEN Qi-jun, WANG Yue-juan, CHEN Hui-tang. Comparative research of trajectory tracking performance of robotic manipulator based on PD control scheme [J]. Control and Decision, 2003, 18(1): 53-56.
- [6] 苏玉鑫, 郑春红. 机器人系统全局渐近稳定非线性PD+轨迹跟踪控制 [J]. 控制与决策, 2009, 24(11): 1697-1701.
SU Yu-xin, ZHENG Chun-hong. Nonlinear PD plus control for global asymptotic tracking of robot manipulators [J]. Control and Design, 2009, 24(11): 1697-1701.
- [7] 孙富春, 孙增圻. 机械手的神经网络自适应滑动模态控制器设计 [J]. 航空学报, 1997, 18(2): 168-172.
- [8] 刘建昌, 苗宇. 基于神经网络补偿的机械臂轨迹控制策略的研究 [J]. 控制与决策, 2005, 20(7): 732-736.
LIU Jian-chang, MIAO Yu. Research on trajectory control strategy of robot arm based on neural network compensation [J]. Control and Decision, 2005, 20(7): 732-736.
- [9] 张文辉, 齐乃明, 尹洪亮. 自适应神经变结构的机器人轨迹跟踪控制 [J]. 控制与决策, 2011, 26(4): 598-600.
ZHANG Wen-hui, QI Nai-ming, YIN Hong-liang. Neural-variable structure-based adaptive trajectory tracking control of robot manipulators [J]. Control and Decision, 2011, 26(4): 598-600.
- [10] 陈龙祥, 蔡国平. 柔性梁受迫振动时滞变结构控制的试验研究 [J]. 力学学报, 2009, 41(3): 410-416.
CHEN Long-xiang, CAI Guo-ping. Experimental study on active control of a rotating flexible beam with time delay [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2009, 41(3): 410-416.
- [11] 蔡国平, 洪嘉振. 柔性机械臂的位置主动控制 [J]. 机械科学与技术, 2005, 24(10): 1178-1180.
CAI Guo-ping, HONG Jia-zhen. Active position control of a flexible manipulator [J]. Mechanical Science and Technology, 2005, 24(10): 1178-1180.
- [12] 滕悠优, 蔡国平. 柔性机械臂的时滞最优跟踪控制 [J]. 应用力学学报, 2007, 24(3): 399-403.
TENG You-you, CAI Guo-ping. Active control for flexible manipulator with time delay [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2007, 24(3): 399-403.
- [13] SONG Bo, SUN Jian-Qiao. Lowpass filter-based continuous-time approximation of delayed dynamical systems [J]. Journal of Vibration and Control, 2010, 17(8): 1173-1183.
- [14] SHENG Jie, ELBEYLI O, SUN Jian-Qiao. Stability and optimal feedback controls for time-delayed linear periodic systems [J]. AIAA Journal, 2004, 42(5): 908-911.

(编辑 葛赵青)